

文章编号:1005-4642(2018)06-0035-05

扭转陀螺的运动研究

洪子昕[†], 时 凯[†], 艾 清

(北京师范大学 物理学系 应用光学北京市重点实验室, 北京 100875)

摘 要:运用欧拉动力学方程分析了扭转陀螺的力学特性,从理论上预测了陀螺释放后 250 s 内的运动情况,实验研究了陀螺的定轴性和进动性对陀螺运动的影响.实验结果表明:在初始扭转力矩变大时,进动角与章动角的角速度与角度峰值都会变大,但变化周期几乎不变.

关键词:陀螺;扭转力矩;欧拉动力学方程

中图分类号:O313

文献标识码:A

DOI:10.19655/j.cnki.1005-4642.2018.06.007

陀螺具有定轴性和进动性特性.在无法直接观测到外界情况时,这两大特性使我们能够完成对物体的姿态控制,进而完成汽车及飞机导航、弹道导弹惯性制导等任务.激光陀螺仪、MEMS 陀螺仪等新型陀螺仪的出现^[1-2],更是将陀螺仪的应用范围拓展到了心脏检测^[3]等领域.目前对于陀螺在无外力作用、在脉冲力矩作用下以及在常值力矩作用下的运动研究已较为详尽^[4].2017 年 IYPT 赛题中的第 12 题扭转陀螺,提出了陀螺在变化力矩作用下会如何运动的问题.本文对机械陀螺仪进行了分析,给出了陀螺运动的理论预测,并从实验上进行了验证,直观地展示了陀螺的定轴性和进动性对陀螺运动的影响.

1 理论分析

将陀螺分为框架与转子 2 部分,转子即转动部分.转子的运动可视为定点转动与质心平动的叠加.由于陀螺有良好的定轴性,本文只考虑转子的定点转动,如图 1 所示.其中 Z 轴方向的灰色线段表示绳子,O 点为转子质心, ω 为转子初始角速度.

为了便于描述转子的运动,建立图 2 所示的定坐标系 OXYZ 与动坐标系 Oxyz.定坐标系是以转子中心为原点 O,以转子初始角动量的方向

为 X 轴正向、以竖直向上为 Z 轴正向的右手坐标系,固定不动;动坐标系半固连在转子上,随着转子一起运动(不包括转子自转).

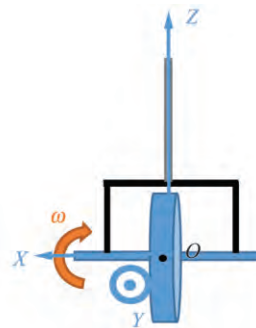


图 1 陀螺示意图

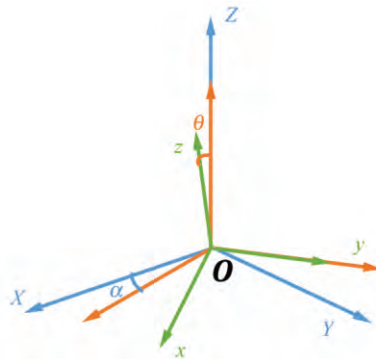


图 2 坐标系

收稿日期:2018-03-04

作者简介:洪子昕(1998-),女,山西运城人,北京师范大学物理学系 2016 级本科生.

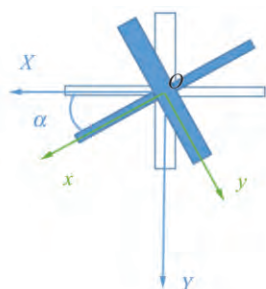
时 凯(1998-),男,河南郑州人,北京师范大学物理学系 2016 级本科生.

指导教师:艾 清(1981-),男,湖南长沙人,北京师范大学物理学系副教授,博士,研究方向为量子光学、生命体中量子相干效应、精密测量.

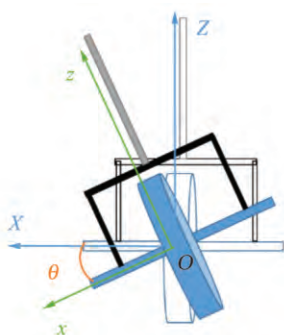
[†]:并列第一作者,对本文贡献相同.



定坐标系与动坐标系的变换关系为:将定坐标系绕 Z 轴转过 α 角,得到图 2 中的橙色坐标系.再绕 y 轴转过 θ 角,得到图 2 中的绿色坐标系 $Oxyz$,即动坐标系.图 3 为运动中陀螺的俯视图与正视图.



(a) 陀螺俯视图



(b) 陀螺正视图

图 3 α 和 θ 图示

在此,可以进行问题的转化.将转子的空间定位问题转化为 2 个坐标系的相对位置问题,进而转化为 α 和 θ 的确定问题.

欧拉动力学方程是研究定点转动的常用方程,这里引入欧拉动力学方程进行理论推导.对框架-转子整体列欧拉动力学方程^[5]为

$$\frac{dH_x}{dt} + \omega_y H_z - \omega_z H_y = M_x, \quad (1)$$

$$\frac{dH_y}{dt} + \omega_z H_x - \omega_x H_z = M_y, \quad (2)$$

$$\frac{dH_z}{dt} + \omega_x H_y - \omega_y H_x = M_z, \quad (3)$$

式中, H_x , H_y 和 H_z 为动坐标系下系统的角动量分量, ω_x , ω_y 和 ω_z 为对应的角速度分量, M_x , M_y 和 M_z 为对应的力矩分量.又已知在动坐标系下,系统的角动量为

$$\mathbf{H} = I_1(\dot{\varphi} + \omega_x)\mathbf{i} + I_2\omega_x\mathbf{i} + I_y\omega_y\mathbf{j} + I_z\omega_z\mathbf{k}, \quad (4)$$

式中, I_1 和 I_2 分别为转子和框架在 x 轴方向的转

动惯量, I_y 和 I_z 为 y 和 z 方向框架与转子整体的转动惯量, φ 为转子的自转角.将 ω_x , ω_y , ω_z , M_y 和 M_z 用 α , θ 和 φ 表示,有

$$\omega_x = -\dot{\alpha}\sin\theta, \quad (5)$$

$$\omega_y = \dot{\theta}, \quad (6)$$

$$\omega_z = \dot{\alpha}\cos\theta, \quad (7)$$

$$M_y = -rmgs\sin\theta, \quad (8)$$

$$M_z = -k\alpha\cos\theta, \quad (9)$$

式中, k 为绳子的扭矩系数, r 为转子质心至绳子与转子连接点的距离, m 为陀螺的质量, g 为重力加速度.将(5)~(9)式代入(1)~(3)式.同时,考虑到框架陀螺的力学特性^[1],即沿转子自转轴方向的力矩无法向内传递给转子,只有传递到转子上的力矩才能产生作用. M_x 无法直接确定,需要通过实验探究 M_x 的形式,得到具有预测功能的经验公式.

2 实验研究

2.1 未知参量求解

2.1.1 转动惯量测量

使用转动惯量测量仪测量陀螺 x , y 和 z 轴的转动惯量,并且使用 Capstone 进行数据处理.

将转子视为多个规则圆盘的叠加,可算出 x 方向转子的转动惯量 I_1 .由于转动惯量具有可加性,因此可作差求出 x 方向框架的转动惯量 I_2 .

2.1.2 绳子扭矩系数测量

实验采用橡皮绳,设绳子满足扭力公式,即绳子的回复力矩 M 满足

$$M = -k\alpha, \quad (10)$$

由转动定理得

$$I_z\ddot{\alpha} = -k\alpha, \quad (11)$$

该运动为简谐运动,且运动的角频率满足

$$\omega^2 = \frac{k}{I_z}. \quad (12)$$

在实验装置的底部固定拍摄设备,按图 1 连接好装置,扭转绳子数圈,再平稳地释放.录制自放手到绳子几乎不再扭转的视频.进行后期处理,得到 $\alpha-t$ 关系图像,并用 Matlab 拟合,如图 4 所示.得到拟合方程为

$$\alpha = -10.7e^{-0.121t}\sin(3.61t - 1.72) + 0.566,$$

相关系数 $R^2 = 0.996$ 可以认为在研究范围内,扭矩公式一直成立,则绳子的扭矩系数 $k = 6.11 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad}^2/\text{s}^2$.

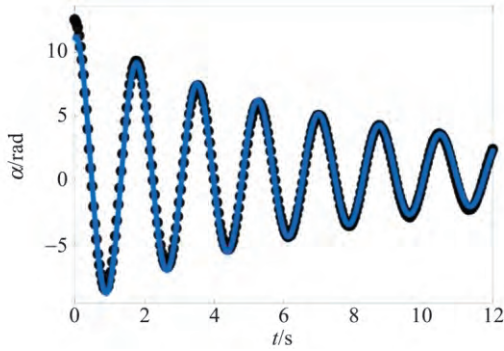


图 4 扭矩系数拟合曲线

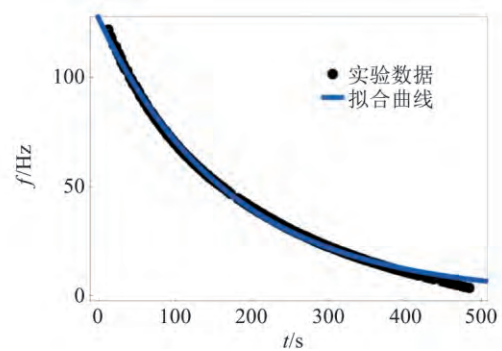


图 6 转子转动的 $f-t$ 图像

2.1.3 M_x 探究

按图 5 搭建装置, 将光感与示波器相连, 将激光笔与光感调节至等高, 并将陀螺放置在二者之间. 在转子上贴 1 张薄纸片, 使转子每转 1 周, 纸片能够挡 1 次光, 光感接收到 1 次信号变化, 从而使示波器的波形瞬时改变, 得到尖峰. 在示波器显示屏上能得到转子的即时转动频率.

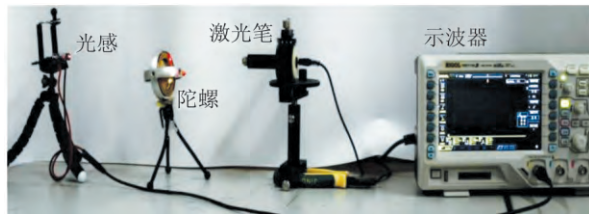


图 5 转速衰减实验装置

首先通过预实验, 求转子的最大转速. 实验中采用电启动陀螺, 观察示波器的频率示数, 发现加速 30 s 后, 转子的转动频率基本不变, 且稳定在 149 Hz. 故之后每次实验时, 加速转子 30 s 以上, 使得每次实验时, 转子的初始转速相同.

再进行转子转速衰减方式的探究. 加速转子 30 s 以上, 拍摄示波器显示屏, 后期读取转子转动的时间与示波器即时的频率示数, 得到转子转动的 $f-t$ 图像, 如图 6 所示.

根据实验数据, 猜测转速呈指数衰减, 得到拟合方程为 $f = ae^{bt}$, 且 $a = 127.1, b = -5.844 \times 10^{-3}, R^2 = 0.9985$. 根据拟合结果, 可以认为转子转速呈指数衰减, 设

$$\omega = 2\pi a e^{bt}, \tag{13}$$

则有

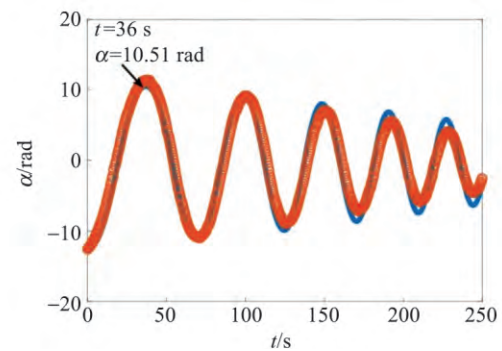
$$L_x = I_1 \omega = 2\pi a I_1 e^{bt}, \tag{14}$$

$$M_x = \frac{dL_x}{dt} = 2\pi a b I_1 e^{bt}. \tag{15}$$

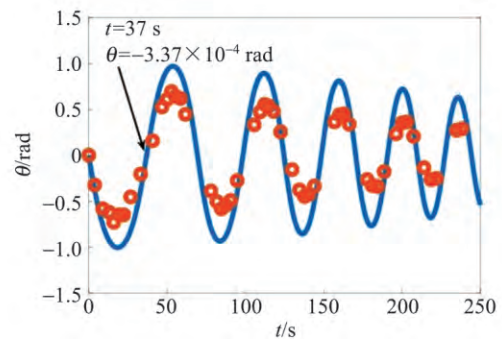
2.1.4 阻尼项求解

当系统以题意方式运动时, 会存在各项阻力, 如连接处与绳子的摩擦阻力、空气黏滞阻力、空气压差阻力. 通过查阅文献[6], 得知这 3 项阻力形式分别为 $c_0, c_1 \dot{\alpha}, c_2 \dot{\alpha}^2$. 其中 c_1 和 c_2 为系统中微元所受的阻尼对系统的积分, 与系统的形状和方位均有关, 其形式十分复杂, 故无法给出具体的表达式. 但阻尼方向一定与角动量方向相反, 即沿 x 和 z 轴负向. 做绳子扭转 2 圈的预实验, 并根据预实验的实验结果, 对原方程中的 M_x 和 M_z 进行调参修正, 得到修正后的图像以及修正系数.

图 7 中橙色点为实验数据, 蓝色曲线为理论



(a) $\alpha-t$



(b) $\theta-t$

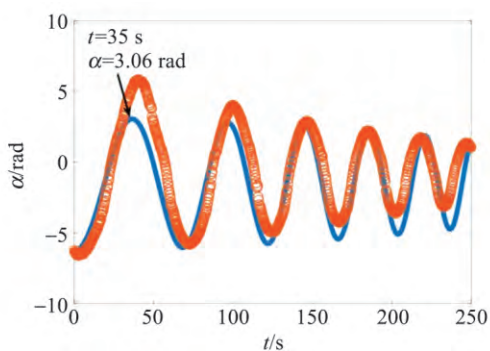
图 7 扭转 2 圈 α 和 θ 理论值与实验数据对比 (理论修正后)

曲线. $\alpha-t$ 图像中, 标出了 α 达到第 1 个最大值时的 t 与 α ; $\theta-t$ 图像中, 标出了 θ 达到第 1 个零点时 (不含起点) 的 t 与 θ .

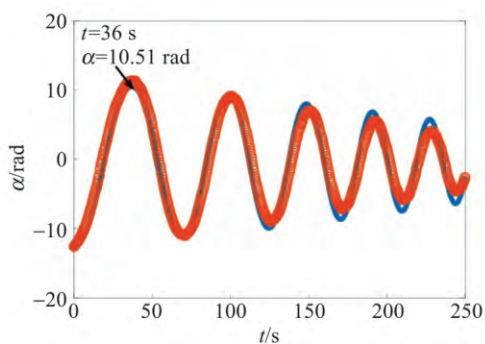
考虑到陀螺运动的累加性, 初始的微小差距会对之后的运动产生较大影响^[7], 可以认为图 7 中实验与理论符合良好. 之后又做了多组实验, 对得到的阻力系数 c_0, c_1, c_2 进行了普适性检验.

2.2 $M_z-\alpha$

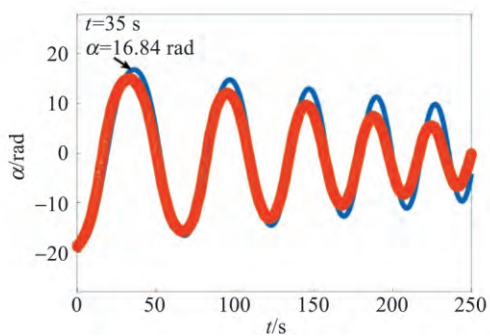
扭转绳子 1~3 圈, 即 M_z 为 1~3 倍, 得到 $\alpha-t$ 实验关系, 即图 8 中橙色数据点. 将 3 个阻力系数代入理论公式, 得到 $\alpha-t$ 的理论关系曲线, 即图 8 中蓝色曲线.



(a) 扭转 1 圈



(b) 扭转 2 圈



(c) 扭转 3 圈

图 8 不同扭转圈数下 $\alpha-t$ 曲线的理论值与实验数据对比

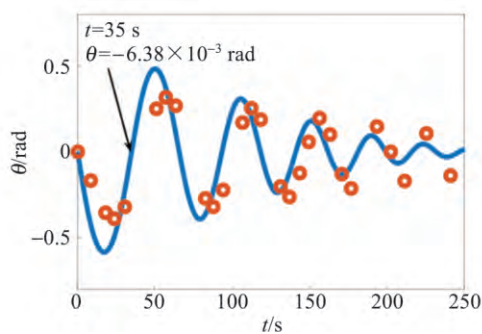
由图 8 可以看出, 随着初始扭转圈数的增加, M_z 增大, α 峰值增大, $\dot{\alpha}$ 增大, α 的变化周期几乎不变.

图 8 中实验与理论存在一定偏差, 这是由于理论中假定绳子与竖直方向的夹角为 0, 但实验中初始扭转圈数越大, 运动过程中绳子与竖直方向的夹角越大, 且转子进动角速度 $\dot{\alpha}$ 越大. 由理论修正部分的初步计算, 绳子的偏角越大, 空气黏滞阻力作用的投影面积越大, 空气黏滞阻力越大; 转子进动的角速度越大, 绳子连接处的常值摩擦阻力就越大. 二者共同导致实际运动中 α 的振幅和周期出现偏差.

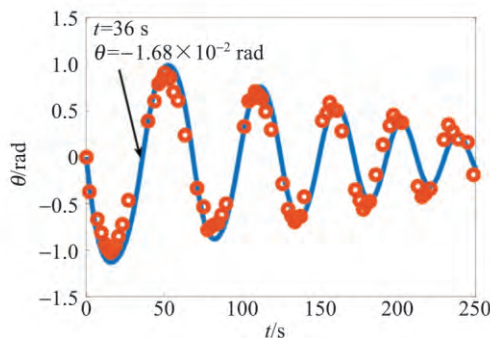
由于是以扭转 2 圈的阻力系数作为阻力系数的理论值, 故扭转 1 圈的实验与理论的偏差为振幅减小较慢, 且周期缩短较慢; 扭转 3 圈的实验与理论的偏差为振幅减小较快, 且周期缩短较快. 考虑到陀螺运动的累加性, 可以认为图 7 能够说明理论的适用性, 适用范围为较少圈数下的前 250 s.

2.3 $M_z-\theta$

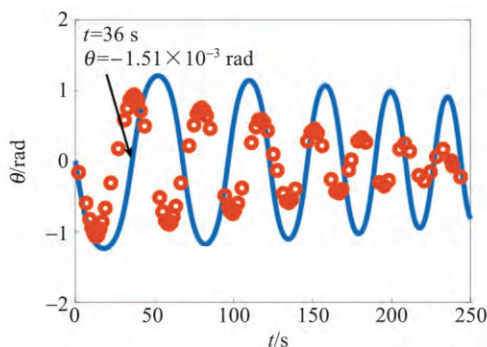
扭转绳子 1~3 圈, 即 M_z 为 1~3 倍, 得到的 $\theta-t$ 实验关系, 即图 9 中橙色数据点. 将 3 个阻力系数代入理论公式, 得到 $\theta-t$ 的理论关系曲线, 即



(a) 扭转 1 圈



(b) 扭转 2 圈



(c) 扭转 3 圈

图 9 不同扭转圈数下 $\theta-t$ 曲线的理论值与实验数据对比

图 9 中蓝色曲线. 由图 9 可知,随着初始扭转圈数增加, M_z 增大, θ 峰值增大, $\dot{\theta}$ 增大, θ 的变化周期几乎不变. 图 9 中的实验与理论存在偏差,但这些偏差依旧可以用对图 8 的说明进行解释.

3 结 论

运用欧拉动力学方程对扭转陀螺进行理论分析,设计实验求解未知量,预测并验证了高速运动的转子在变化力矩作用下的运动情况. 同时发现了初始扭转力矩对进动角 α 、章动角 θ 的影响:

初始扭转力矩增大, α 和 θ 峰值增大, $\dot{\alpha}$ 和 $\dot{\theta}$ 增大,但 α 和 θ 的变化周期几乎不变.

参考文献:

- [1] 刘延柱. 陀螺力学[M]. 2 版. 北京:科学出版社, 2009:1-3,50.
- [2] Ledbetter M, Jensen K, Fischer R, et al. Gyroscopes based on nitrogen-vacancy centers in diamond [J]. Physical Review A, 2012, 86 (5): 27454-27475.
- [3] Tadi M J, Lehtonen E, Saraste A, et al. Gyrocardiography: A new non-invasive monitoring method for the assessment of cardiac mechanics and the estimation of hemodynamic variables [J]. Scientific Reports, 2017, 7(1):6823.
- [4] 于波,陈云相,郭秀中,等. 惯性技术[M]. 北京:北京理工大学出版社,1994:56-64.
- [5] 许江宁,卞鸿巍,刘强,等. 陀螺原理及应用[M]. 北京:国防工业出版社,2009:37-42.
- [6] 张天洋,王艳辉,曲光伟,等. 空气阻力对复摆振动周期的影响[J]. 物理实验,2008,28(11):41-45.
- [7] 刘延柱,成功. 框架陀螺仪运动的混沌性态[J]. 力学学报,2002,34(3):475-480.

Research on torsion gyroscope

HONG Zi-xin, SHI Kai, AI Qing

(Applied Optics Beijing Area Major Laboratory, Department of Physics,
Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: The mechanical properties of torsion gyroscope were analyzed by using Euler equations. The motion within the first 250 s after the release was predicted theoretically. The influence of the gyroscope's stable spin axis and precession on the gyroscope's motion was studied experimentally. It was pointed out that the angular velocity and peak value of the precession angle and the nutation angle became larger for a larger initial torsion torque, but the period was almost unchanged.

Key words: gyroscope; torsional moment; Euler equations

[责任编辑:任德香]